

УДК 517.938.5  
ББК 22.161.6  
И49

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского комитета образования.

**Ильяшенко Ю. С.**

И49 Аттракторы и их фрактальная размерность. — М.: МЦНМО, 2005. — 16 с.

ISBN 5-94057-201-4

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором в летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2004 г. Она посвящена одному из разделов теории динамических систем — аттракторам и их хаусдорфовой (фрактальной) размерности. Рассматриваются различные примеры отображений, порождающие как странные, так и классические аттракторы. В качестве основного примера странных аттракторов рассматривается соленоид Смейла—Вильямса, проводится аналогия между ним и канторовым совершенным множеством.

От читателя не требуется никаких начальных знаний из теории дифференциальных уравнений. Брошюра адресована старшим школьникам и студентам младших курсов.

ББК 22.161.6

*Юлий Сергеевич Ильяшенко*

## АТТРАКТОРЫ И ИХ ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Редакторы Д. Вельтишев, М. Вельтишев, В. Клепцын.  
Тех. редакторы Д. Вельтишев, М. Вельтишев.

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 23.03.2005 г.  
Формат 60 × 88/16. Печать офсетная. Печ. л. 1. Тираж 1000 экз. Заказ 4788.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИЦ». 140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга». Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241–72–85. E-mail: biblio@tmscste.ru

ISBN 5-94057-201-4



© Ильяшенко Ю. С., 2004.  
© МЦНМО, 2005.

## Предисловие

Эта брошюра написана на основе видеозаписи лекции, прочитанной в летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2004 г. Она посвящена одному из наиболее красивых разделов теории динамических систем — аттракторам и их хаусдорфовой (фрактальной) размерности.

Здесь рассматриваются различные примеры гладких отображений, порождающих как странные, так и классические аттракторы. В качестве основного примера странного аттрактора рассматривается соленоид Смейла—Вильямса. Хочется отметить, что от читателя не требуется никаких предварительных знаний из теории дифференциальных уравнений.

Обработка текста проведена Дмитрием и Михаилом Вельтишевыми, они же изготовили рисунки. Виктор Клепцын, которому принадлежит идея издания этой книжки, отредактировал текст. Без энтузиазма Виктора, Михаила и Дмитрия эта лекция никогда бы не увидела свет. Я выражаю им свою искреннюю благодарность.

## 1. Эволюционные процессы

Все процессы, происходящие вокруг нас (или почти все, если говорить более осторожно), описываются дифференциальными уравнениями. Например, рассмотрим полёт камня под действием некоторых сил. Состояние камня определяется его положением в пространстве, т. е. тремя координатами, и скоростью — ещё тремя координатами вектора скорости. Этот набор из шести чисел можно рассматривать как точку в некотором воображаемом шестимерном пространстве, точно так же, как две координаты задают точку на плоскости. Силы, действующие на летящий камень, позволяют вычислить вектор в этом пространстве, который указывает, как меняется состояние камня. Поэтому эволюционные процессы описываются следующей картинкой: имеется *пространство состояний*, и к каждой точке этого пространства приложен вектор. Со временем состояние меняется — это и есть *эволюция* (рис. 1).

Эта эволюция происходит по следующему закону: скорость изменения состояния процесса равняется вектору, приложенному в той точке, которая соответствует состоянию в момент времени  $t$ . Получается диф-



Рис. 1

ференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = v(x).$$

Такое начало может показаться странным для неподготовленного читателя, который ещё не знаком с курсом дифференциальных уравнений. Но мы поступим так, как предлагал поступить Пуанкаре в этом контексте. Мы не будем доказывать, что у этого дифференциального уравнения есть решения, предварительно объяснив, что это такое. Раз эволюционный процесс идёт, то пусть он себе идёт, а мы пойдём позавтракаем. Мы вернёмся ровно через час и посмотрим, куда переместились точки нашего *фазового* пространства (это синоним термина «пространство состояний») за один час под действием эволюционного процесса. Каждая точка будет двигаться по своей траектории и придёт в какое-то конечное положение, соответствующее времени, равному единице. Получается отображение, называемое *преобразованием фазового потока* за единицу времени. Обозначим это отображение через  $f$ . Оно взаимно однозначно, потому что если у нас есть дифференциальное уравнение, то на самом деле можно ответить не только на вопрос, где будет точка через час, но и где она была час назад. Вся теория, которая позволяет перейти от дифференциальных уравнений к этому отображению, мы пропустим, и начнём сразу с отображений. Они и будут нашими главными героями.

Пусть наше фазовое пространство — шар  $B$  (неважно, в двумерном, трёхмерном или многомерном пространстве). Рассмотрим непрерывное отображение  $f$  этого шара строго внутрь себя, взаимно однозначное со своим образом. Мы хотим задать вопрос: что будет с точками нашего фазового пространства через большое время? Говорят, что мы интересуемся *предельным поведением*, но мы не будем формально определять это понятие.

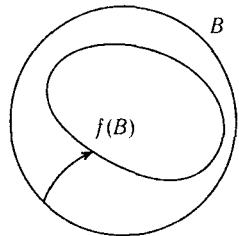


Рис. 2

Лаплас был первым человеком, который понял, что если мы можем увеличить размерность нашего фазового пространства, скажем, от двух до шести, то сможем её увеличить и до любой конечной величины, например, сделать её в несколько раз больше, чем число атомов во Вселенной. Положение и скорости всех атомов во Вселенной тоже описываются некоторой точкой в очень многомерном фазовом пространстве, и всё развитие Вселенной, по Лапласу, можно описать некоторым (впро-

чем, никому пока не известным) дифференциальным уравнением. Отсюда Лаплас делал вывод, что, поскольку поведение решений дифференциального уравнения в прошлом и в будущем можно предсказать, как только написано дифференциальное уравнение, следовательно, и судьбу нашей Вселенной можно предсказать на любое время вперёд, а также реконструировать на любое время назад. Надо сказать, что эта концепция предопределённости, к которой Лаплас относился весьма серьёзно, звучит несколько уныло: не слишком интересно жить во Вселенной, судьба которой предопределена. Но не будем углубляться в философию этого вопроса, а вернёмся к нашему отображению.

Почему всё-таки нас интересует именно предельное поведение? Чтобы понять это, от Вселенной перейдём к объекту гораздо более observable — к нашей Солнечной системе. Поставим тот же вопрос: что будет с ней через очень большое время? Например, упадут все планеты на Солнце или не упадут — это вопрос о предельном поведении. Этот пример показывает, что такого рода вопросы действительно являются центральными. При этом мы можем забыть о сравнительно сложном объекте — дифференциальном уравнении — и говорить только об отображении. Будем наблюдать нашу Вселенную, скажем, каждую тысячу лет, а остальное время отдыхать, и это будет означать, что мы наблюдаем действие одного и того же отображения сначала один раз через первую тысячу лет, затем второй раз через вторую тысячу лет и т. д. Если одно и то же отображение повторяется, т. е. применяется сначала к точке, потом к её образу и т. д., то говорят, что мы рассматриваем *итерации* этого отображения:

$$x \mapsto f(x) \mapsto f(f(x)) = f^2(x) \mapsto \dots \mapsto f^n(x) \mapsto \dots$$

## 2. Аттракторы

*Аттракторы* — это множества, к которым приближаются точки при последовательных итерациях отображения. С отображениями работать гораздо легче, чем с дифференциальными уравнениями. Если мы хотим найти аттрактор, то нам не нужно вычислять эти итерации и анализировать наше отображение. Оно само найдёт свой аттрактор.

Вернёмся к примеру с отображением шара в себя и нарисуем несколько его итераций. Конечно, вместо шара можно было бы взять любую замкнутую ограниченную область в пространстве, но важно отображать её в себя. Поскольку первый образ был вложен в шар, образ образа будет вложен в первый образ, потому что наше преобразование

взаимно однозначно, и т. д. Очень легко поверить (а на первом курсе мехмата это доказывается), что наша последовательность вложенных множеств имеет что-то типа «ядра», а говоря формально, что пересечение всех этих множеств непусто. На рис. 3 это «ядро» изображено чёрным цветом. Это и есть то множество, которое динамическая система сама для себя находит. Именно его мы и будем называть аттрактором динамической системы (динамическая система — это синоним и дифференциального уравнения, и отображения).

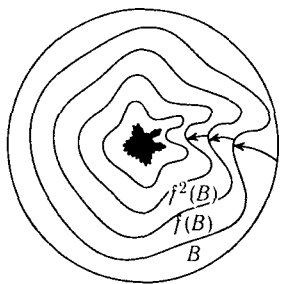


Рис. 3

Определение. Аттрактор  $A$  отображения  $f: B \rightarrow B$  — это пересечение образов фазового пространства при итерациях отображения:

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(B).$$

**Задача 2.1.** Пусть множество  $A$  — аттрактор отображения  $f$ . Докажите, что  $f(A) = A$ .

Рассмотрим несколько примеров. Возьмём диск единичного радиуса с центром в начале координат. Каждую точку  $x$  отображаем в  $x/2$ . Первым образом будет диск радиуса  $1/2$ , вторым образом — диск радиуса  $1/4$ . Ясно, что аттрактором этого отображения будет одна точка — начало координат.

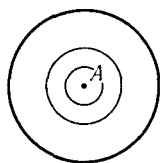


Рис. 4

Рассмотрим другой пример, в котором фазовое пространство будет кольцом внешнего радиуса 2 и внутреннего радиуса  $1/2$ . Будем в качестве координат использовать так называемые полярные координаты. Вместо абсциссы и ординаты будем указывать азимут точки, или, как говорят, полярный угол — тот угол, под которым она видна из центра, если за ноль взять положительное направление оси  $Ox$ , и расстояние от центра. В этих координатах возьмём такое отображение:

$$f: (r, \varphi) \mapsto \left(1 + \frac{r-1}{2}, \varphi\right) = \left(\frac{1+r}{2}, \varphi\right).$$

Из первой записи формулы видно, что при этом отображении окружность радиуса 1 остаётся на месте, а из второй записи легко увидеть, что все

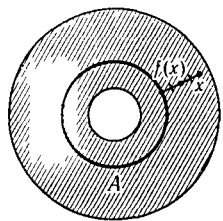


Рис. 5

остальные точки кольца будут стягиваться к этой окружности. Более точно, на каждом шаге расстояние между точкой  $x$  и ближайшей к ней точкой кольца сокращается вдвое. Теперь понятно, что аттрактором будет окружность радиуса 1.

### 3. Странные аттракторы

Как мы уже убедились на предыдущих примерах, в качестве аттракторов могут выступать точки и линии. Легко также построить примеры отображений, у которых аттрактор будет гладкой поверхностью любой наперед заданной размерности, например,  $k$ -мерной сферой. Однако в качестве аттракторов могут выступать и совсем сложные множества. Бывают так называемые *странные* аттракторы, не являющиеся поверхностями никакой размерности (в том числе нулевой и первой), а устроенные «рваным», негладким образом. Этот раздел посвящён именно таким аттракторам.

Прежде чем пытаться построить отображение, порождающее странный аттрактор, рассмотрим пример «плохого» множества на прямой. Его конструкция подскажет нам, как построить такое отображение.

#### 3.1. Канторово совершенное множество

Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$ . Разделим этот отрезок на три равные части и выкинем среднюю. Затем будем действовать по индукции. Мы скажем, что после выкидывания средней части у нас получились два отрезка ранга 1. Предположим теперь, что мы уже умеем определять отрезки ранга  $n$ . С каждым отрезком ранга  $n$  произведём ту же процедуру: выкинем из него среднюю треть. Из каждого отрезка ранга  $n$  у нас получится по два отрезка ранга  $n+1$ . Пусть  $\sigma_n$  — объединение всех отрезков ранга  $n$ . Рассмотрим множество

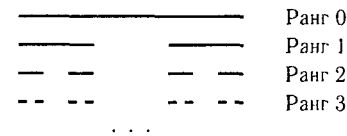


Рис. 6

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n.$$

Оно и называется *канторовым совершенным множеством*. В дальнейшем мы всегда будем обозначать его буквой  $C$ .

**Задача 3.1.** Докажите, что множество  $C$  непусто.

**Задача 3.2.** Докажите, что множество  $C$  равномощно отрезку  $[0, 1]$ , т. е. имеет мощность континуум.

Можно к построению канторова множества подходить иначе. Именно, вместо слова «выкинем» будем говорить «оставим». Тогда процесс построения описывается так: от исходного отрезка оставим только первую и третью треть, далее повторим эту операцию с двумя получившимися отрезками и т. д. То, что в итоге останется после бесконечного числа выкидываний от исходного отрезка, и будет канторовым множеством.

Из конструкции нашего множества видно, что оно очень «дырявое», т. е. не содержит ни одного отрезка. Тем не менее, задача 3.2 показывает, что в нём столько же точек, сколько и во всём отрезке.

Теперь покажем, что такие «плохие» множества суть не просто монстры, построенные для нашего развлечения, а что они действительно могут возникнуть в качестве аттракторов при итерациях хорошего, гладкого отображения.

### 3.2. Соленоид Смейла—Вильямса

Итак, приступим к построению отображения, порождающего странный аттрактор. В одном из предыдущих примеров мы рассматривали кольцо в качестве фазового пространства. Теперь мы вместо кольца рассмотрим его трёхмерный аналог — «бублик», или, говоря более формально, *полноторие*. Сначала дадим словесное описание отображения бублика в себя, и лишь потом запишем для него формулу.

Предположим, что бублик сделан из теста. Будем раскатывать его так, чтобы он стал длинным и тонким. При этом тесто сожмётся, и объём раскатанного бублика станет значительно меньше. Мы хотим запихнуть его обратно в исходный бублик, но просто так он туда не поместится. Его можно, конечно, смять гармошкой, но тогда не получится ничего интересного. Поступим иначе: разрежем раскатанный бублик и, мысля исходный бублик как полую трубку, вставим его туда и намотаем столько раз, сколько наматывается (скажем, два раза), а потом склеим концы в месте разреза (как будто бы мы его и не разрезали). Это и будет то отображение, которое нам нужно.

Разумеется, используя изложенные выше соображения, такое отображение можно построить не единственным образом. Сейчас мы зададим формулами один конкретный способ вложения бублика в себя и будем анализировать именно его. Мы будем использовать аналог полярных координат в нашем трёхмерном бублике: по азимуту по-прежнему будет координата  $\varphi$ , а  $x$  и  $y$  — декартовы координаты в сечении бублика плоскостью  $\varphi = \text{const}$ . Пусть радиус сечения бублика равен 2, тогда оно задаётся неравенством  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

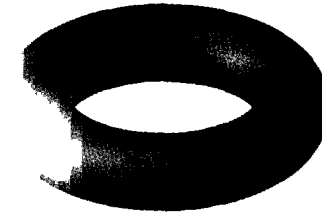


Рис. 7

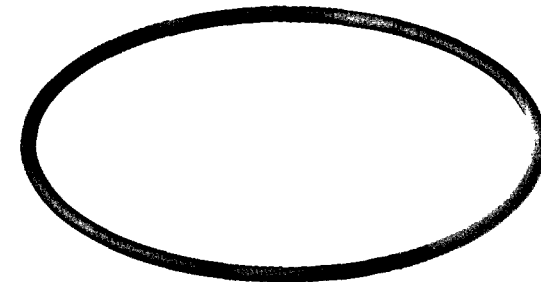


Рис. 8

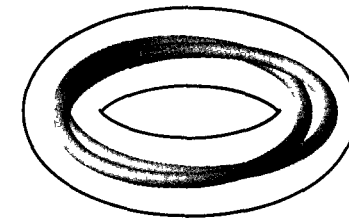


Рис. 9

В самом общем виде наше отображение может быть задано так:

$$f: (\varphi, x, y) \mapsto (\varphi', x', y'),$$

где  $\varphi'$ ,  $x'$  и  $y'$  — некоторые функции от переменных  $\varphi$ ,  $x$  и  $y$ . Мы считаем, что наш бублик удлинится в 2 раза, поэтому положим  $\varphi' = 2\varphi$ . Осталось так задать функции  $x'$  и  $y'$ , чтобы это отображение давало в качестве образа нечто похожее на то, что изображено на рис. 9. Будем считать, что диаметр сечения образа должен уменьшаться по сравнению с исходным в 5 раз, поэтому наши функции должны иметь вид

$$x' = \tilde{x}(\varphi) + \frac{x}{5}, \quad y' = \tilde{y}(\varphi) + \frac{y}{5},$$

где  $\tilde{x}(\varphi)$  и  $\tilde{y}(\varphi)$  — некоторые функции угла  $\varphi$ , задающие координаты центра образа сечения плоскостью  $\{\varphi = \text{const}\}$ . Заметим теперь, что при нашем выборе функции  $\varphi'$  в сечении  $\varphi = \varphi_0$  исходного бублика будут отображаться точки из сечений  $\varphi = \frac{\varphi_0}{2}$  и  $\varphi = \frac{\varphi_0}{2} + \pi$ . Поскольку отображение  $f$  должно быть взаимно однозначным, нам нужно, чтобы образы этих двух сечений не пересеклись. Как видно из наших формул, эти образы представляют собой диски радиуса  $2/5$ , поэтому достаточно, чтобы расстояние между их центрами было бы больше чем  $4/5$ . Давайте возьмём в качестве  $\tilde{x}(\varphi)$  и  $\tilde{y}(\varphi)$  функции  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  соответственно. Тогда это расстояние при каждом значении  $\varphi$  будет равно

$$\begin{aligned} |(\tilde{x}(\varphi), \tilde{y}(\varphi)) - (\tilde{x}(\varphi + \pi), \tilde{y}(\varphi + \pi))| &= \\ &= |(\cos \varphi, \sin \varphi) - (\cos(\varphi + \pi), \sin(\varphi + \pi))| = \\ &= |(\cos \varphi, \sin \varphi) - (-\cos \varphi, -\sin \varphi)| = |(2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi)| = 2 \geq 4/5, \end{aligned}$$

поэтому образы сечений действительно пересекаться не будут. Итак, наше отображение задаётся формулами

$$f: (\varphi, x, y) \mapsto \left(2\varphi, \cos \varphi + \frac{x}{5}, \sin \varphi + \frac{y}{5}\right).$$

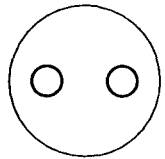


Рис. 10

Это отображение впервые было построено и исследовано примерно 40 лет назад двумя математиками — Смейлом и Вильямсом. Нам же остаётся понять, почему оно порождает странный аттрактор.

Мы будем изучать множества  $f^k(B)$  в сечении бублика плоскостью  $\varphi = 0$  — другие сечения устроены аналогично. Пусть  $D$  — диск, высекаемый этой плоскостью в бублике. При первой итерации в рассматриваемое сечение перейдут точки сечений  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Тогда

$$f(B) \cap D = f(B \cap \{\varphi = 0\}) \cup f(B \cap \{\varphi = \pi\}),$$

поэтому множество  $f(B) \cap D$  состоит из двух дисков первого ранга (рис. 10). Поскольку в каждый из дисков  $B \cap \{\varphi = 0\}$  и  $B \cap \{\varphi = \pi\}$  перейдут по два диска, образ после двух итераций будет состоять уже из четырёх дисков второго ранга, по две штуки в каждом диске первого ранга. Несложно понять, что множество  $f^2(B) \cap D$  выглядит так, как показано на рис. 11. Чтобы это стало совсем очевидно, рассмотрим множество

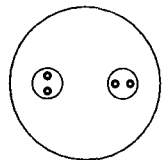


Рис. 11

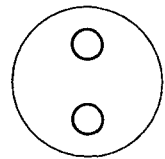


Рис. 12

$f(B) \cap \{\varphi = \pi\}$ . Оно устроено так, как показано на рис. 12. Именно поэтому два диска второго ранга повернуты на нулевой угол, а два других повернуты на угол  $\pi/2$ . Понятно, что все множества вида  $f^k(B) \cap D$  устроены аналогичным образом. На  $k$ -м шаге количество дисков равно  $2^k$ , а радиус диска  $k$ -го ранга равен  $\frac{2}{5^k}$ .

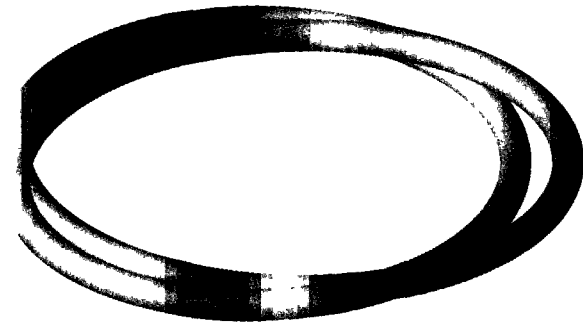


Рис. 13

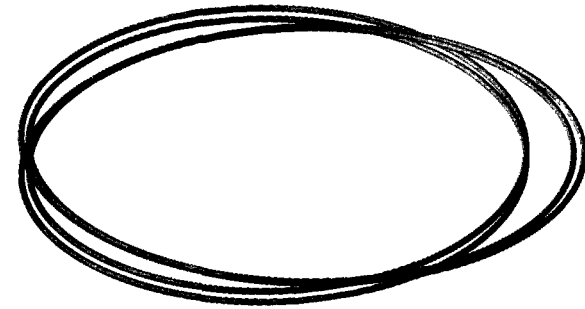


Рис. 14

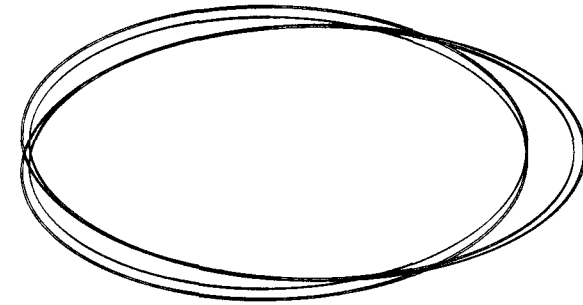


Рис. 15

Обозначим через  $A$  аттрактор нашего отображения, а через  $S$  — множество  $A \cap D$ . Аттрактор, полученный нами, называется *соленоидом Смейла—Вильямса*. Соленоид — это электромагнитная катушка. Почему же наш аттрактор называется соленоидом? Посмотрим на множества  $f^k(B)$  при разных  $k$ . Множество  $B$ , т. е. сам бублик, наматывается вокруг своей дырки один раз (рис. 13). Множество  $f(B)$  обмотано вокруг неё 2 раза (рис. 14),  $f^2(B)$  — 4 раза (рис. 15),  $f^3(B)$  наматывается 8 раз, и т. д. Иными словами, множество  $f^k(B)$  делает вокруг дырки  $2^k$  витков.

В пересечении всех этих множеств мы получим множество, состоящее из бесконечного, а точнее, континуального числа витков, похожих на обмотку электромагнитной катушки. Витки соответствуют точкам множества  $A \cap \{\varphi = \text{const}\}$ , являющегося, как мы сейчас покажем, аналогом канторова множества.

Проведём аналогию между процессами построения множеств  $C$  и  $S$ . При построении канторова множества на первом шаге мы оставляем два отрезка ранга 1, имеющих длину  $1/3$ . Точно так же от диска  $D$  (сечения бублика) остаются 2 диска ранга 1, имеющих радиус  $2/5$ . На втором шаге конструируем объекты ранга 2 — произведя ту же операцию с каждым отрезком и каждым диском первого ранга, получаем 4 отрезка длины  $1/9$  и 4 диска радиуса  $2/25$ , и т. д. Разница лишь в том, что правила выбора положения дисков очередного ранга посложнее, чем для канторова множества. В классическом построении множеством ранга  $n$  называется объединение всех отрезков ранга  $n$ , а в построении соленоида — объединение всех дисков ранга  $n$ . Затем, так же как и в конструкции канторова множества, рассматривается пересечение этих множеств.

Таким образом, сечение соленоида действительно очень похоже на канторово совершенное множество. Совершенно аналогично можно показать, что оно континуально.

Соленоид Смейла—Вильямса — замечательный пример, показывающий, как множества канторовского типа приходят в динамические системы и откуда в природе могут возникать странные аттракторы.

## 4. Хаусдорфова размерность

### 4.1. Что такое размерность?

До сих пор мы говорили только об аттракторах. Настало время обсудить вопрос о том, что такое *размерность* аттрактора. Дело в том, что фазовое пространство может быть очень многомерным, а аттрактор может быть очень маленьким. Вспомним самый первый пример, в котором

точка  $x$  переходит в  $x/2$ . Если бы мы в качестве  $x$  брали точку не на диске, а в 1000-мерном шаре, то всё равно такое отображение давало бы единственную точку в качестве аттрактора, т. е. нульмерное множество. Аттрактор может быть в каком-то смысле гораздо беднее, чем исходное фазовое пространство. Вот это соображение мы и попытаемся сейчас формализовать. Можно сказать, что аттрактор имеет размерность гораздо меньшую, чем пространство состояний. Для «хороших» аттракторов это годится, но мы только что убедились, что аттракторы бывают гораздо сложнее, чем линии, точки или поверхности, — они бывают странными! Спрашивается, что же такое размерность странного аттрактора? Хотелось бы придать строгий смысл фразе «аттрактор может иметь гораздо меньшую размерность». Но для этого нужно научиться определять размерность произвольного множества.

Сначала обратимся с этим вопросом к топологии. Теория размерности активно изучалась в начале XX в. в работах Хаусдорфа, П. С. Урысона и П. С. Александрова. Топология научилась отвечать на вопрос, что такое размерность множества. Идея *топологической размерности*, грубо говоря, состоит в следующем. Представим себе, что мы живём внутри множества, т. е. в мире, в котором нет точек, кроме тех, которые принадлежат нашему множеству. Живя в этом мире, можно с помощью формальных операций научиться отвечать на вопрос о том, какова его размерность. Можно задать этот вопрос и про множество Кантора, но сначала подумаем над тем, какой ответ нам хотелось бы получить.

Для этого заметим, что отрезок (одномерное множество) разрезается на 2 вдвое меньших части, квадрат (двумерный объект) — на 4, а куб — на 8 вдвое меньших частей. Размерность в этом случае получается как логарифм количества частей по основанию коэффициента подобия. Канторово множество распадается на две половины, каждая из которых подобна ему с коэффициентом  $1/3$ , поэтому естественным был бы ответ

$$\dim C = \log_3 2.$$

Однако этот замечательный ответ никак нельзя получить, живя внутри канторова множества. Если игнорировать тот факт, что оно расположено на прямой, и считать одинаковыми те множества, которые можно получить друг из друга с помощью гомеоморфизма (взаимно однозначного непрерывного в обе стороны отображения), то ничего, кроме ответа «нуль», получить нельзя. Что же касается соленоида, то его топологическая размерность равна 1. При этом ответ будет одинаков независимо от того, во сколько раз сжимается бублик и сколько раз он наматывается, лишь бы отображение оставалось взаимно однозначным со своим образом.

Определим теперь другое понятие размерности, дающее нам тот ответ, который нам нужен. Эта размерность называется *хаусдорфовой*. Её определение существенно использует тот факт, что наблюдатель живет не внутри множества, а, что гораздо более естественно, в объемлющем пространстве. Идея определения хаусдорфовой размерности состоит в следующем. Предположим, что мы почти ничего не знаем о множестве, оно у нас спрятано в чёрном ящике. Но этот чёрный ящик — не просто глухая коробка, а некий автомат, которому можно задавать вопросы. Будем считать, что наше множество «хорошее», т. е. про него известно, что это либо кривая, либо поверхность, либо тело в трёхмерном пространстве. Мы можем задавать вопросы про объём, длину и площадь нашего множества. Пусть, например, автомат ответил, что длина множества бесконечна, площадь равна 1, а объём равен 0. Легко догадаться, что это именно поверхность, так как у линии была бы нулевая площадь, а у тела — ненулевой объём.

Определение хаусдорфовой размерности основано на аналогичных соображениях, но оно будет работать и в том случае, когда в качестве множества мы возьмём, например, соленоид или множество Кантора. Правда, «количество вопросов» будет гораздо больше. Будем задавать вопросы следующего типа: а правда ли, что наше множество можно покрыть конечным числом шаров, суммарный *d*-мерный объём которых будет сколь угодно маленьким? Теперь скажем это более формально.

**Определение.** Говорят, что множество  $M$  имеет *нулевой d-мерный объём*, если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдётся конечный набор шаров  $Q_1, \dots, Q_n$ , имеющих радиусы  $r_1, \dots, r_n$  соответственно и таких, что

$$M \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n r_i^d < \varepsilon.$$

В этом случае мы будем писать, что  $V_d(M) = 0$ .

В этом определении важно то, что число  $d$  не обязано быть целым! Оно может быть произвольным положительным вещественным числом.

Для дальнейшего нам потребуется определить понятие *d*-мерного объёма, а не только его равенство нулю. Это хотелось бы сделать (по аналогии с мерой Лебега) так: *d*-мерным объёмом множества  $M$  называется точная нижняя грань сумм  $\sum r_i^d$  по всем конечным покрытиям  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  множества  $M$ , т. е.

$$V_d(M) = \inf_{\{Q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i^d \mid M \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i \right\}.$$

К сожалению, при таком определении *d*-мерный объём всегда конечен (а говорить о том, что поверхность имеет конечную длину, по меньшей мере странно) и всегда не превосходит величины  $(\text{diam } M)^d$ . Поэтому мы сейчас доработаем это определение. Как можно будет увидеть, в его конструкции используются примерно те же соображения, что и при построении определённого интеграла Римана.

**Определение.** Величина

$$V_d(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\{Q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i^d \mid M \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i, \text{ причём } r_i < \delta \text{ при всех } i \right\}$$

называется *d*-мерным объёмом множества  $M$ .

Как легко видеть, равенство  $V_d(M) = 0$  в смысле этого нового определения эквивалентно старому определению: если сумма *d*-мерных объёмов меньше  $\varepsilon$ , то радиус каждого шара меньше  $\varepsilon^{1/d}$ .

**Определение.** Хаусдорфовой размерностью множества  $M$  называется число

$$\dim_H(M) = \inf \{d \mid V_d(M) = 0\}.$$

**Задача 4.1.** Докажите, что  $\dim_H(M) = \sup \{d \mid V_d(M) = \infty\}$ .

Остаётся на примере понять, как работает определение хаусдорфовой размерности.

#### 4.2. Хаусдорфова размерность канторова множества

Сейчас мы покажем, что конструкция хаусдорфовой размерности для канторова множества даёт ответ  $\dim_H C = \log_3 2$ . Будем накрывать множество  $C$  одномерными шарами, т. е. попросту отрезками. Спросим себя, с каких отрезков надо начинать покрытие множества? Ясно, что как нельзя лучше для этой цели подходят отрезки ранга  $n$ . Возьмём в качестве  $Q_i$  отрезки ранга  $n$ , тогда получится  $2^n$  отрезков длины  $3^{-n}$ . В этом случае суммарный *d*-мерный объём элементов покрытия сложится из  $2^n$  одинаковых слагаемых, каждое из которых равно  $3^{-nd}$ . Обозначим этот объём через  $V(n, d)$ . Если  $d > d_0 = \log_3 2$ , то число

$$V(n, d) = 2^n \cdot 3^{-nd} = \left(\frac{2}{3^d}\right)^n$$

будет стремиться к нулю с ростом  $n$ , так как дробь в скобках будет меньше единицы. Если же взять  $d = d_0$ , то  $V(n, d) = 1$ . Это означает, что хаусдорфова размерность канторова множества не может быть больше чем  $d_0$ . Обоснование того, что она в точности равна  $d_0$ , представляет собой технически громоздкое рассуждение, и мы его здесь приводить не будем.

### 4.3. Теорема о хаусдорфовой размерности аттрактора

Рассмотрим отображение  $f$  и посмотрим, как оно действует на множества разных размерностей: на тела, поверхности и кривые. Мы будем считать, что действия разворачиваются в трёхмерном пространстве. Пусть известно, что наше отображение уменьшает трёхмерные объёмы, уменьшает площади и увеличивает длины. Забудем на время про то, что аттракторы бывают странными, и предположим, что они, напротив, бывают только нестранными — точками, линиями, поверхностями или телами. Зададимся теперь вопросом: а может ли аттрактор нашего отображения быть поверхностью? Нет, не может. В самом деле, допустим, что аттрактором является некоторая поверхность. Задача 2.1 утверждает, что отображение  $f$  переводит аттрактор в себя, поэтому его площадь сохраняется. Но это противоречит тому, что отображение  $f$  уменьшает площади поверхностей.

На рассуждениях подобного рода основано доказательство *теоремы о хаусдорфовой размерности аттрактора*, которую мы сейчас сформулируем.

**Теорема 4.1.** Пусть  $B \subset \mathbb{R}^n$ , а отображение  $f: B \rightarrow B$  уменьшает  $k$ -мерные объёмы. Пусть  $A$  — аттрактор отображения  $f$ . Тогда  $\dim_H(A) \leq k$ .

Посмотрим, чем эта теорема может быть интересна для физиков. Оказывается, аттрактор хаусдорфовой размерности  $k$  можно вложить (не будем уточнять, в каком смысле) в пространство размерности  $2k + 1$ . Это означает, что на аттракторе размерности  $k$  точки можно различать с помощью  $2k + 1$  параметра. Такого рода ответ физику уже вполне интересен. Отображение может действовать в фазовом пространстве колоссальной размерности, но если оно уменьшает  $k$ -мерные объёмы, то точки его аттрактора описываются  $2k + 1$  правильно подобранным параметром.